

Связанные состояния конденсата Бозе-Эйнштейна с угловым моментом

**Кафедра физики частиц и космологии
физического факультета МГУ имени М. В.
Ломоносова**

Студент 443 группы:
Дмитриев Антон Сергеевич

Научный руководитель:
Кандидат физ. мат. наук
Панин Александр Григорьевич

Введение

В настоящей работе исследуется поведение связанного состояния конденсата Бозе-Эйнштейна в трех пространственных измерениях с ненулевым угловым моментом. Результаты также распространяются на модель легкой бозонной темной материи, которая может образовывать конденсат, называемый в литературе Бозе звездой [1][4][5].

Будут численно получены профили волновых функций состояния конденсата Бозе-Эйнштейна для различных значений углового момента, а также проведены проверки ряда соотношений, справедливых для данной модели [2][4][5]. Далее будет исследована стабильность состояний с ненулевым моментом.

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую
связанное состояние конденсата Бозе-Эйнштейна [2]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\Delta\psi}{2m} + mU\psi \quad (1)$$

$$\Delta U = 4\pi Gm|\psi|^2 \quad (2)$$

А также будем нормировать волновую функцию на число частиц:

$$\int_V |\psi|^2 d^3x = N \quad (3)$$

Мы будем искать статическое, локализованное в пространстве решение уравнений (1), (2) при условии (3) в цилиндрической системе координат с помощью аксиально-симметричной подстановки:

$$\psi(\rho, z, \varphi) = \psi_0(\rho, z) e^{il\varphi} e^{-iwt} \quad (4)$$

Где w - квантовомеханическая энергия.

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \int_V \psi^* \left(-\frac{\Delta\psi}{2m} + mU\psi \right) d^3x = w \int_V |\psi|^2 d^3x = wN \quad (5)$$

Масштабные преобразования.

Сделаем масштабные преобразования для упрощения системы уравнений:

$$\psi = \sqrt{\frac{m}{G}}\psi', U = U', \rho = m\rho', z = mz',$$
$$t = mt', M = NGm^2.$$

Опуская штрихи:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\Delta\psi}{2} + U\psi \quad (4)$$

$$\Delta U = 4\pi|\psi|^2 \quad (5)$$

$$\int_V |\psi|^2 d^3x = M \quad (6)$$

Систему уравнений будем решать численно методом релаксации.

Будем считать, что процедура релаксации сошлась к стационарному решению, если изменение полной энергии (7) на следующей итерации $< \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$. Нами было выбрано $\varepsilon = 10^{-12}$.

$$E = \int_V \left(-\frac{\psi^* \Delta \psi}{2} - \frac{U \Delta U}{8\pi} + U \psi^* \psi \right) d^3x \quad (7)$$

Граничные условия для задачи:

Для локализованной волновой функции справедливы следующие граничные условия: $\psi \sim \rho^{|l|}$ при $\rho \rightarrow 0$, и экспоненциально спадание волновой функции на бесконечности. Также из вида уравнений мы наложили условие симметричности волновой функции по z .

Для потенциала: $U|_{r \rightarrow \infty} = -\frac{M}{r}$, а также условия симметричности потенциала по координатам в нуле.

Соотношения

Введем ряд соотношений справедливых для нашей системы, и будем использовать их в качестве проверки:

1) Теорема Вириала:

$$2|E_k| = 2 \left| \int_V \left(-\frac{\psi^* \Delta \psi}{2m} \right) d^3x \right| = E_p = \int_V \left(\frac{mU|\psi|^2}{2} \right) d^3x \quad (8)$$

2)

$$|E_{grav}| = \left| \int_V \left(-\frac{U \Delta U}{8\pi G} \right) d^3x \right| = E_p = \int_V \left(\frac{mU|\psi|^2}{2} \right) d^3x \quad (9)$$

3)

$$E = \frac{1}{3}wN \quad (10)$$

Граничные условия для задачи:

Для локализованной волновой функции справедливы следующие граничные условия: $\psi \sim \rho^{|l|}$ при $\rho \rightarrow 0$, и экспоненциально спадание волновой функции на бесконечности. Также из вида уравнений мы наложили условие симметричности волновой функции по z .

Для потенциала: $U|_{r \rightarrow \infty} = -\frac{M}{r}$, а также условия симметричности потенциала по координатам в нуле.

Отметим, что наша система уравнений обладает масштабными преобразованиями следующего вида:

$$\psi \rightarrow \lambda\psi; U \rightarrow \lambda U; \rho \rightarrow \sqrt{\lambda}\rho;$$

$$z \rightarrow \sqrt{\lambda}z; t \rightarrow \lambda t; M \rightarrow \sqrt{\lambda}M;$$

Таким образом мы можем масштабными преобразованиями получить все решения. Далее будем искать решение с $M = 1$.

Результаты ($l=0$)

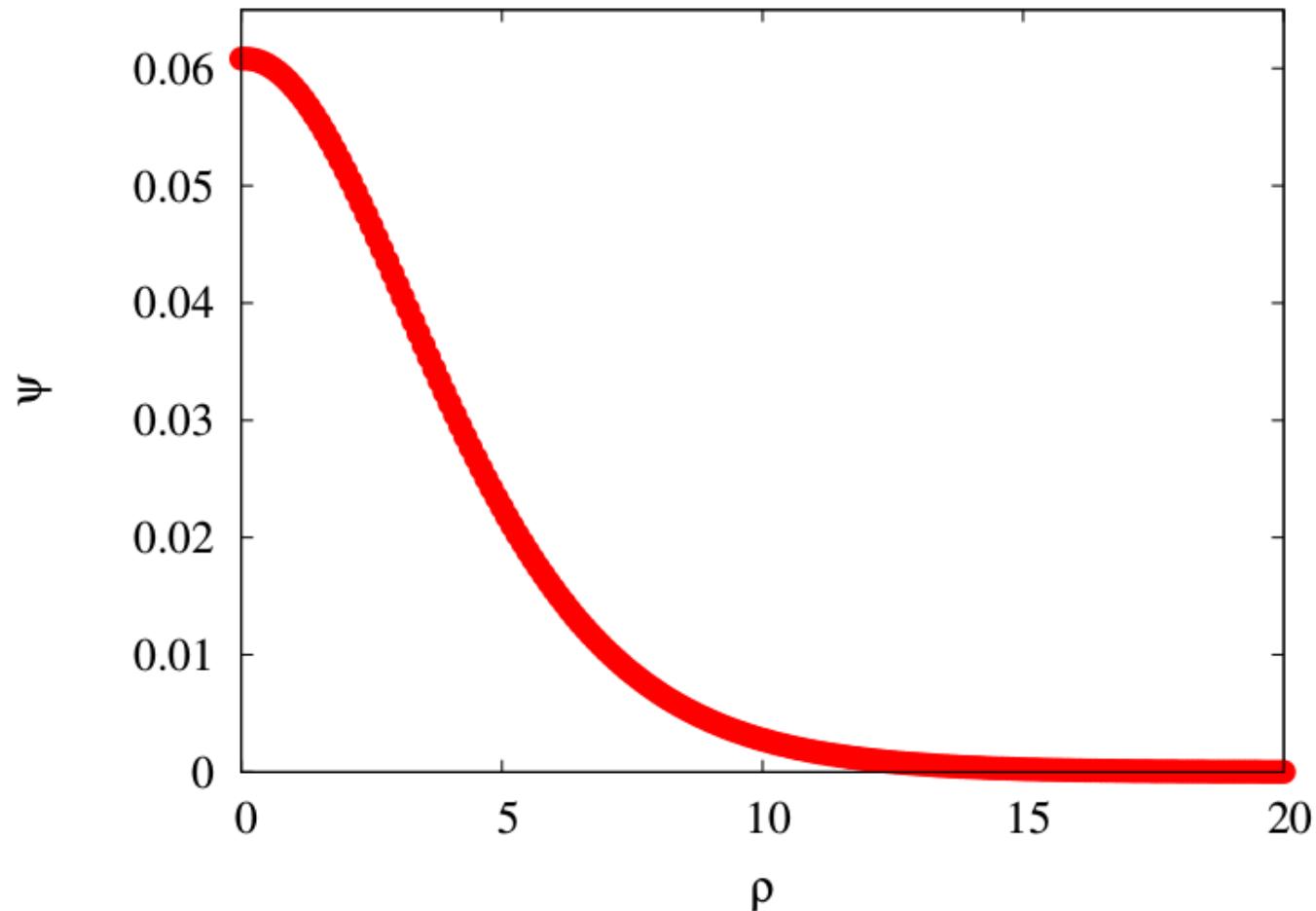


Рис. 1: $\psi(\rho)$ при $l = 0$

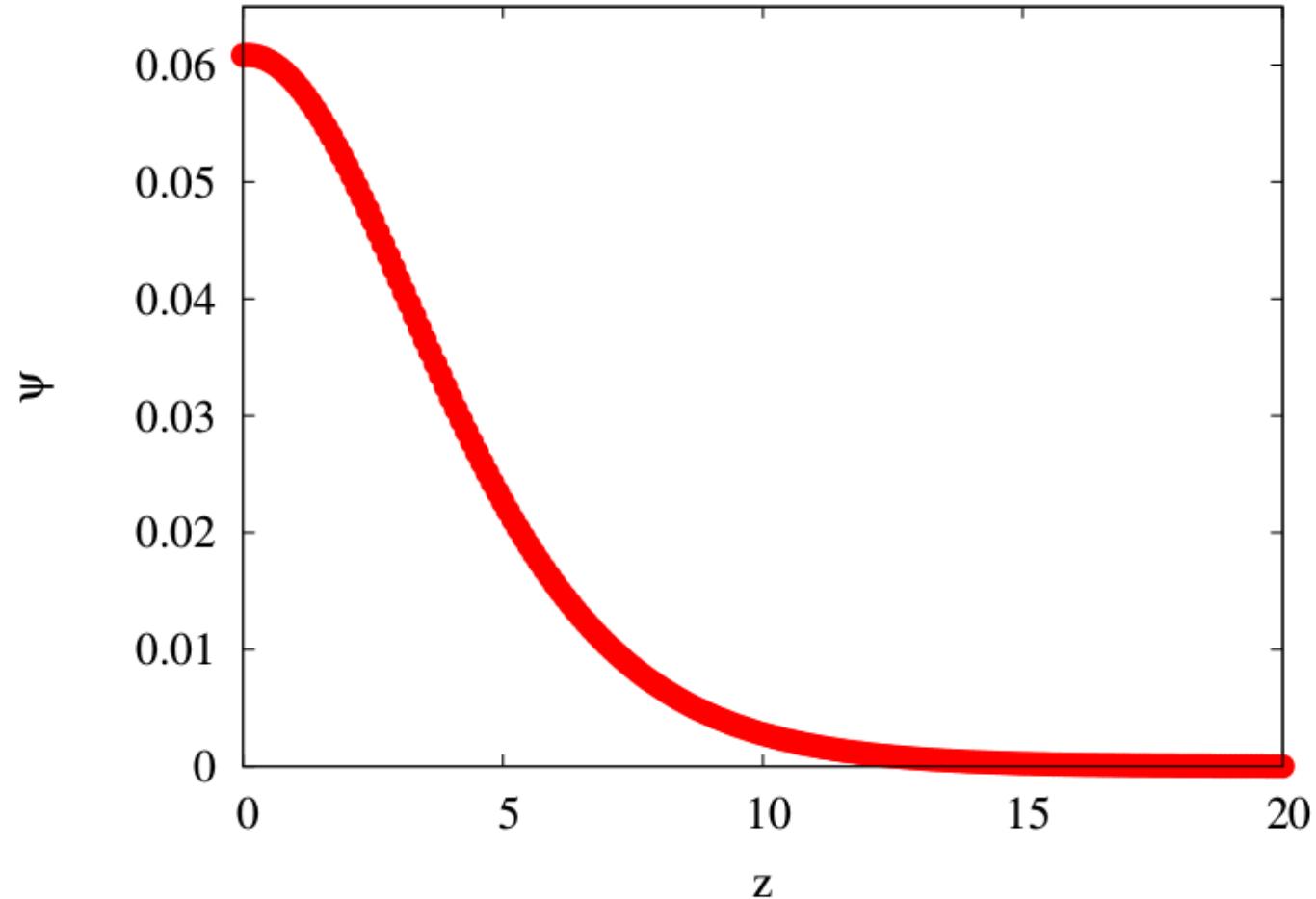


Рис. 3: $\psi(z)$ при $l = 0$

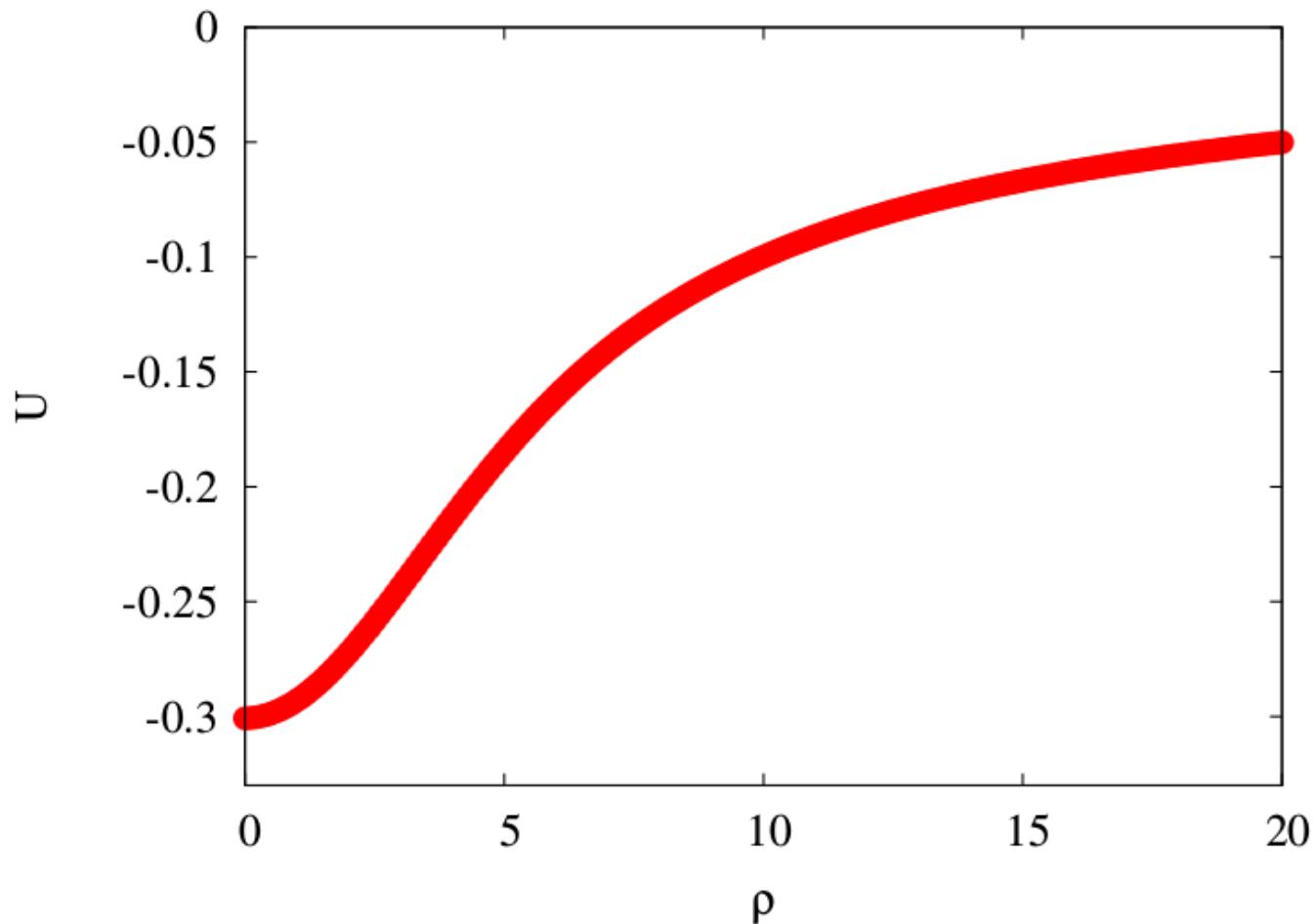


Рис. 2: $U(\rho)$ при $l = 0$

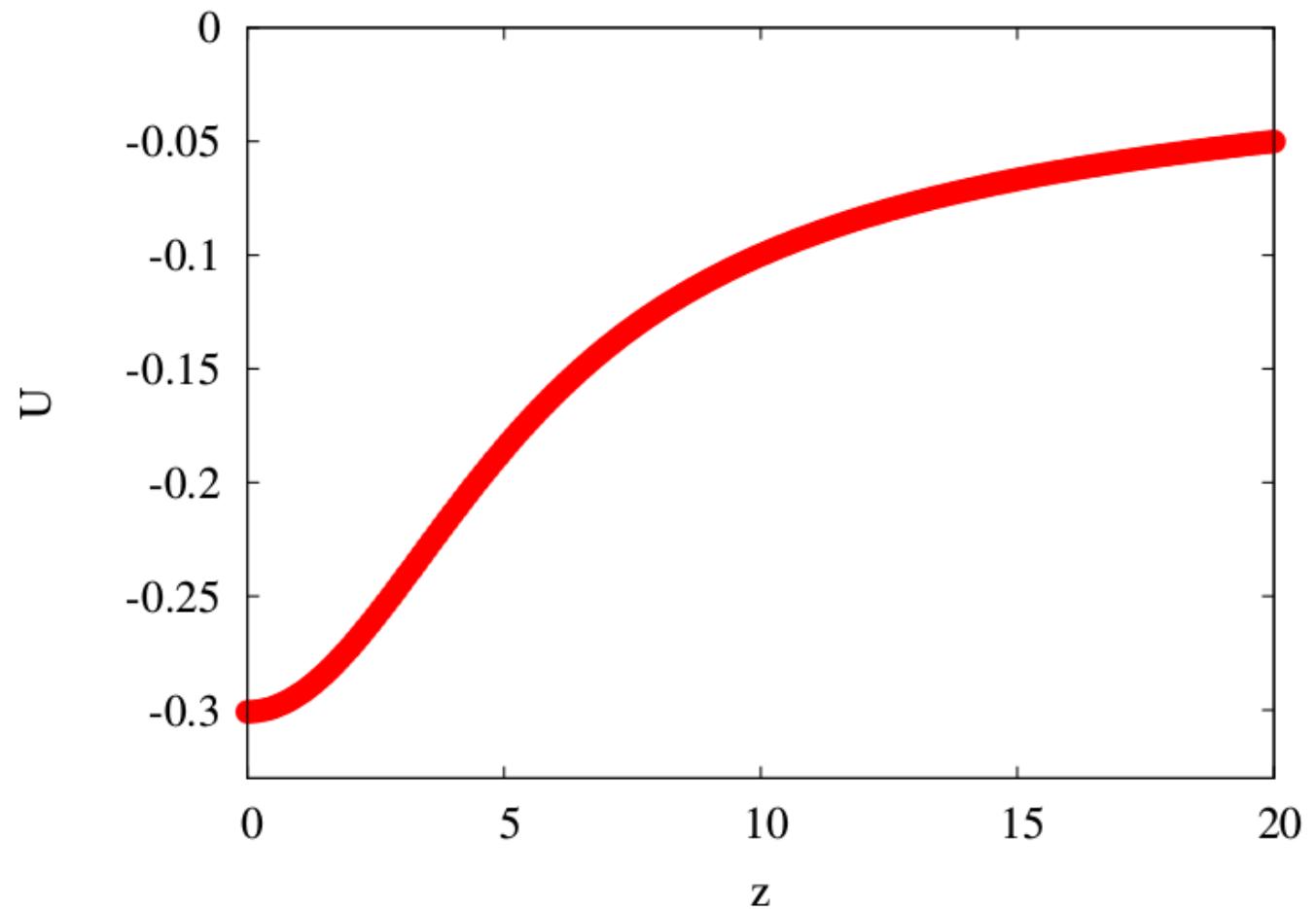


Рис. 4: $U(z)$ при $l = 0$

Проверка соотношений

E	wM	E_{grav}	E_p	E_k
-0.0542471	-0.161148	-0.0534505	0.0534505	0.026327

Таблица 1: Значения характерных величин.

Полученные величины совпадают с точность 1 %. Ранее в литературе уже были получены величины для состояния с $|l| = 0$. Для такой системы: $w = -0.162$

Состояния с $|l|$ отличным от 0.

Теперь рассмотрим решение системы в случае $|l|$ не равном нулю. Решение будем искать в аксиально-симметричном виде:

$$\psi(\rho, z, \varphi, t) = \psi(\rho, z, t)e^{il\varphi} \quad (12)$$

Искать его будем снова методом релаксации. Все сохраняющиеся величины также справедливы и для этого случая.

Результаты ($l=1$)

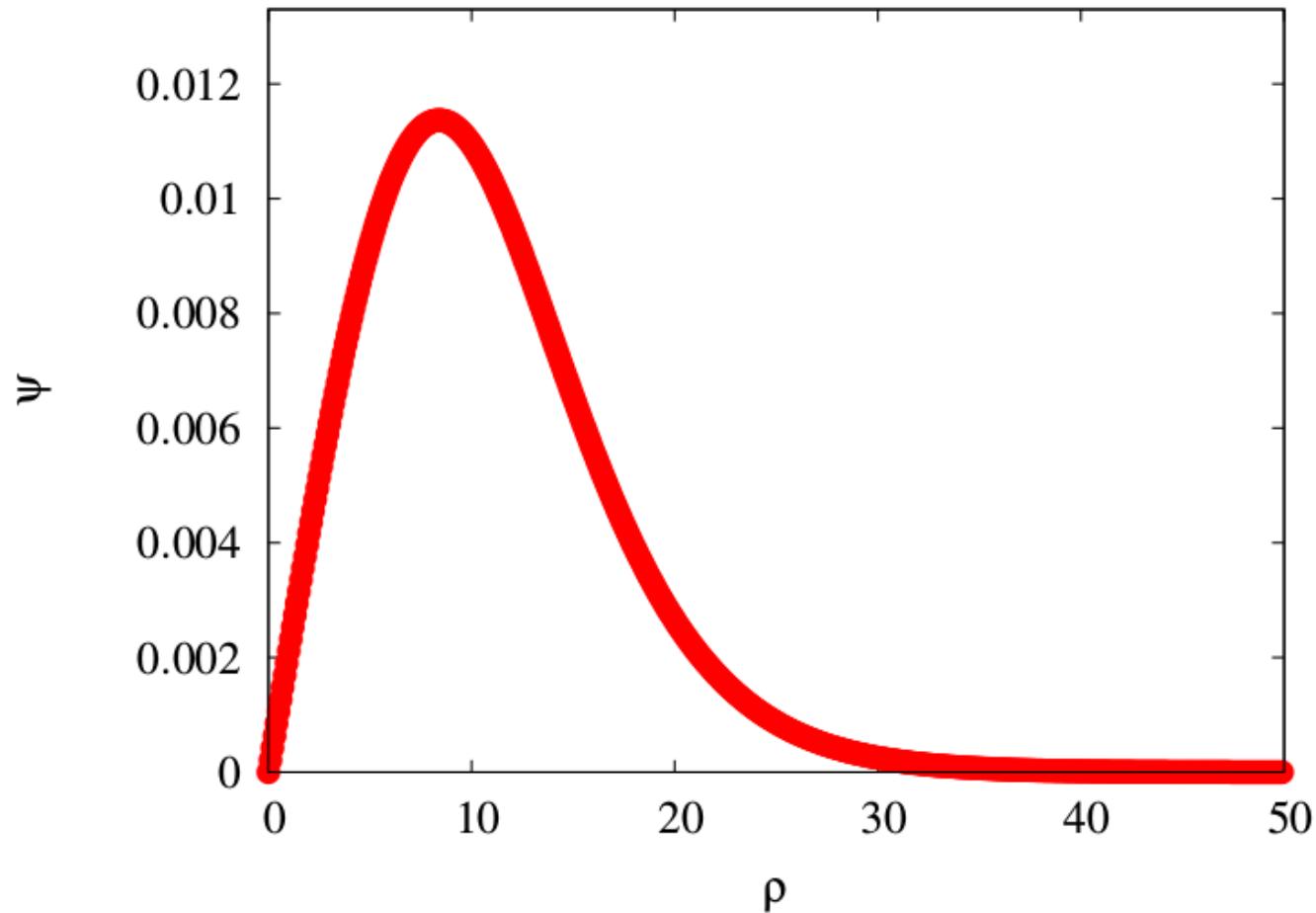


Рис. 5: $\psi(\rho)$ при $l = 1$

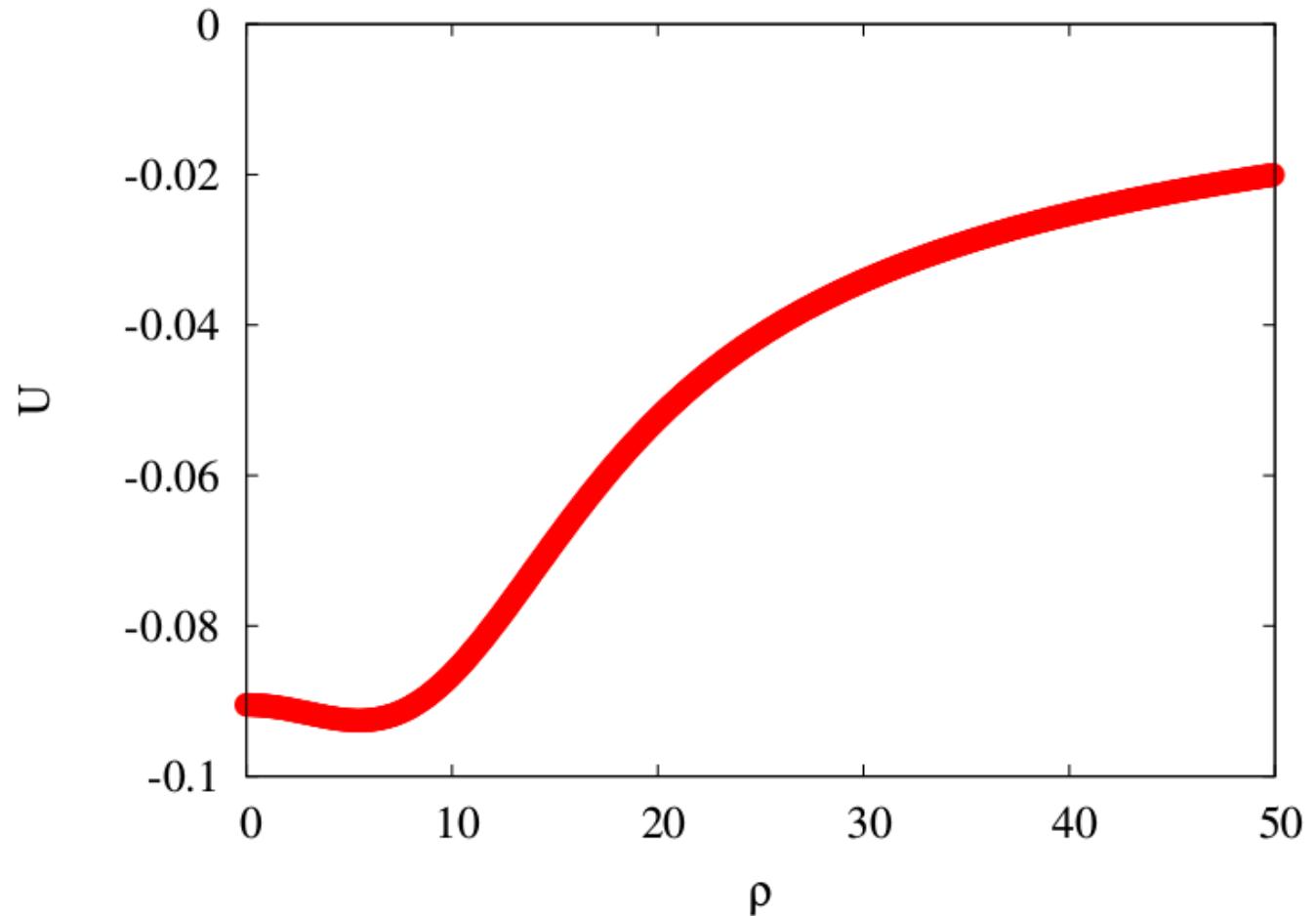


Рис. 6: $U(\rho)$ при $l = 1$

Результаты ($l=2$)

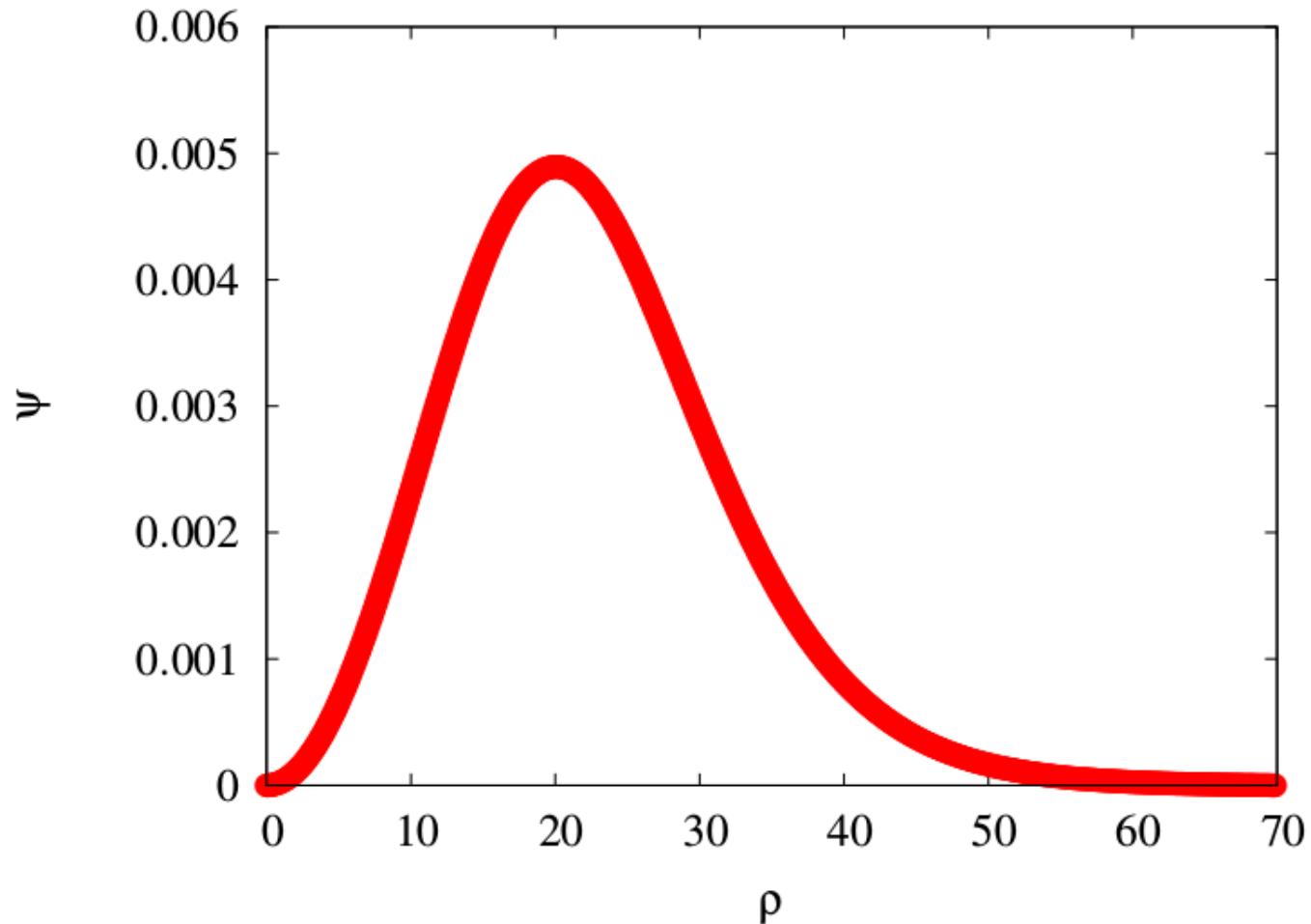


Рис. 7: $\psi(\rho)$ при $l = 2$

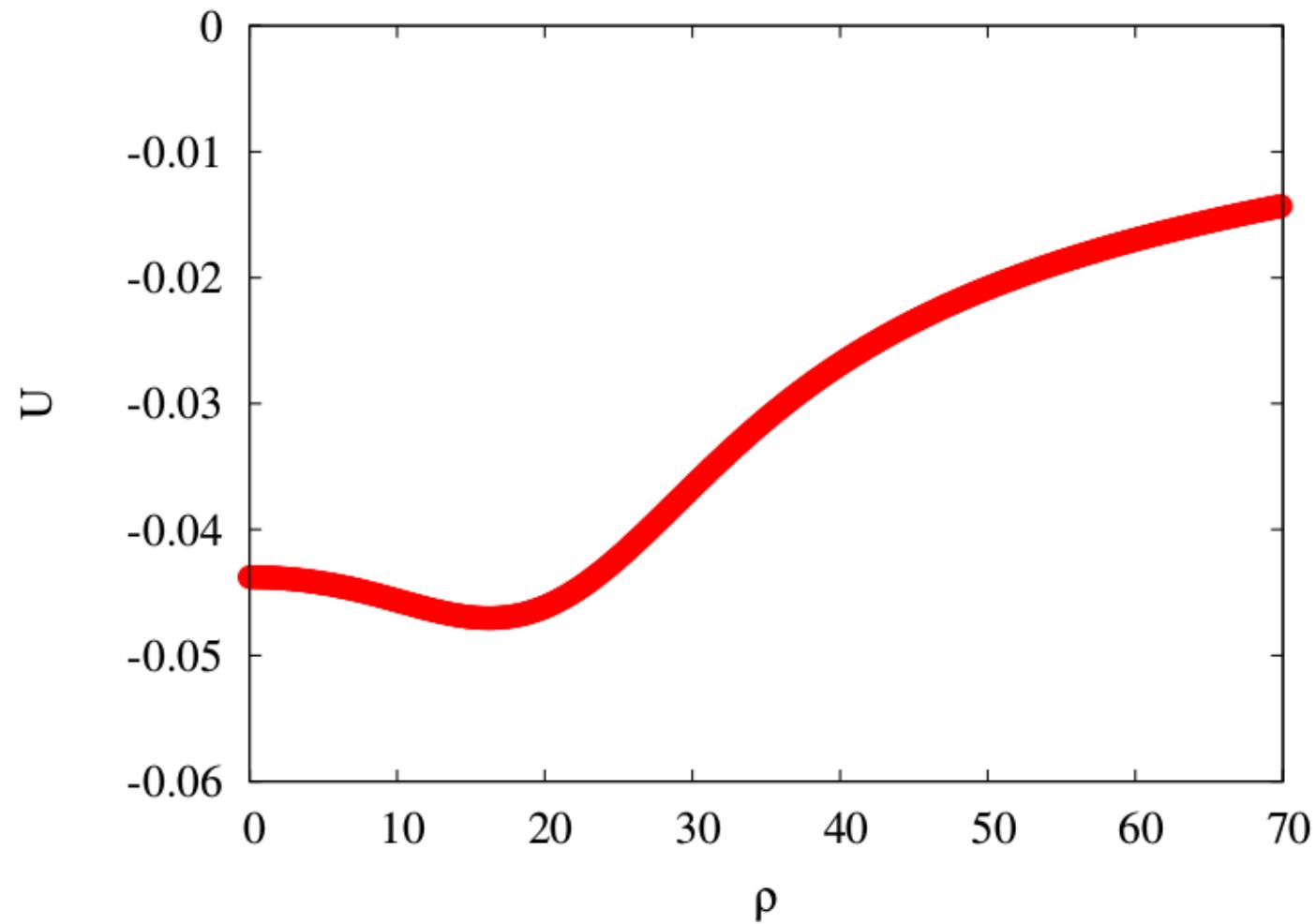


Рис. 8: $U(\rho)$ при $l = 2$

Проверка соотношений

l	E	wM	E_{grav}	E_p	E_k
1	-0.0190122	-0.0566221	-0.018805	0.0188049	0.00930173
2	-0.0101624	-0.0299062	-0.00987193	0.00987193	0.00479955

Таблица 2: Значения характерных величин $l=1$, $l=2$

Полученные величины удовлетворяют соотношениям с точностью до 2.5%

Исследование стабильности.

Мы нашли статическое, локализованное в пространстве решение. Отметим, что данное решение является решением задачи о поиске экстремума функционала энергии. Теперь давайте найдем такое решение, которое не меняет М системы и ее полный момент L, но которое уменьшает энергию.

Рассмотрим волновую функцию:

$$\psi_M = \psi_{bs,M-\Delta M} + \delta\psi = \psi_{bs,M-\Delta M} + C_0\psi_0 + C_L\psi_L$$

Где: $\int_V |\delta\psi|^2 d^3x = \Delta M$

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \psi_0(\rho, z) \\ \psi_L &= \psi_L(\rho, z)e^{iL\varphi}\end{aligned}$$

Из требуемых нами условий, определим константы С.

$$|C_0|^2 = \frac{L-l}{L} \Delta M \quad |C_L|^2 = \frac{l}{L} \Delta M$$

Рассмотрим задачу о поиске экстремума функционала:

$$E[\psi_{bs,M}, U_{bs,M}] = \min_U E[\psi, U] \leq E[\psi, U_{bs}]$$

Критерий стабильности:

$$|w_{bs,M}| < \frac{L-l}{L} |w_0| + \frac{l}{L} |w_L|$$

Где:

$$w_{0/L}\psi_{0/L} = -\frac{\Delta\psi_{0/L}}{2} + U_{bs,M}\psi_{0/L}$$

Исследование и поиск нестабильных мод.

Рассмотрим возмущение над статическим решением:

$$\psi = \psi_{bs} + \delta\psi, U = U_{bs} + \delta U$$

Возмущения будем искать в виде:

$$\delta\psi(t, \rho, z, \varphi) = e^{il\varphi} \sum_m \psi_{1m}(t, \rho, z) e^{im\varphi} + \psi_{2m}(t, \rho, z) e^{-im\varphi}$$

$$\delta U(t, \rho, z, \varphi) = \sum_m \delta U_m(t, \rho, z) e^{im\varphi} + \delta U_m^*(t, \rho, z) e^{-im\varphi}$$

Получим уравнения на эволюцию для каждой моды возмущения:

$$i \frac{\partial \psi_{1m}}{\partial t} = -\frac{\Delta \psi_{1m}}{2} + U_{bs} \psi_{1m} + \delta U_m \psi_{bs}$$

$$\Delta \delta U_m = 4\pi (\psi_{1m} \psi_{bs}^* + \psi_{bs} \psi_{2m}^*)$$

$$i \frac{\partial \psi_{2m}}{\partial t} = -\frac{\Delta \psi_{2m}}{2} + U_{bs} \psi_{2m} + \delta U_m^* \psi_{bs}$$

$$\delta U_m^* = \delta U_m$$

$$\begin{aligned}\psi_{1,m}(t, \rho, z, \varphi) &= \psi_{1,m}(\rho, z, \varphi) e^{-iw_1 t} e^{\gamma t} \\ \delta U_m(t, \rho, z, \varphi) &= \delta U_m(\rho, z, \varphi) e^{-w_u t} e^{\gamma t} \\ \psi_{2,m}(t, \rho, z, \varphi) &= \psi_{2,m}(\rho, z, \varphi) e^{-iw_2 t} e^{\gamma t}\end{aligned}$$

Явным вычислением можно показать, что величина F , является сохраняющейся величиной на уравнениях движения:

$$F = E - wM = E_{bs} - w_{bs}M + (\delta E - w_{bs}\delta M)e^{2\gamma t}$$

Следовательно: $(\delta E - w_{bs}\delta M) = 0$

Систему будем решать численно, методом Кранка-Николсона.

Рассмотрим величину M :

$$\delta M(t + dt) = e^{2\gamma dt} \delta M(t)$$

Тогда:

$$\gamma = \frac{1}{2dt} \ln \left(\frac{\delta M(t + dt)}{\delta M(t)} \right)$$

Проверка сохранения $E - wM$.

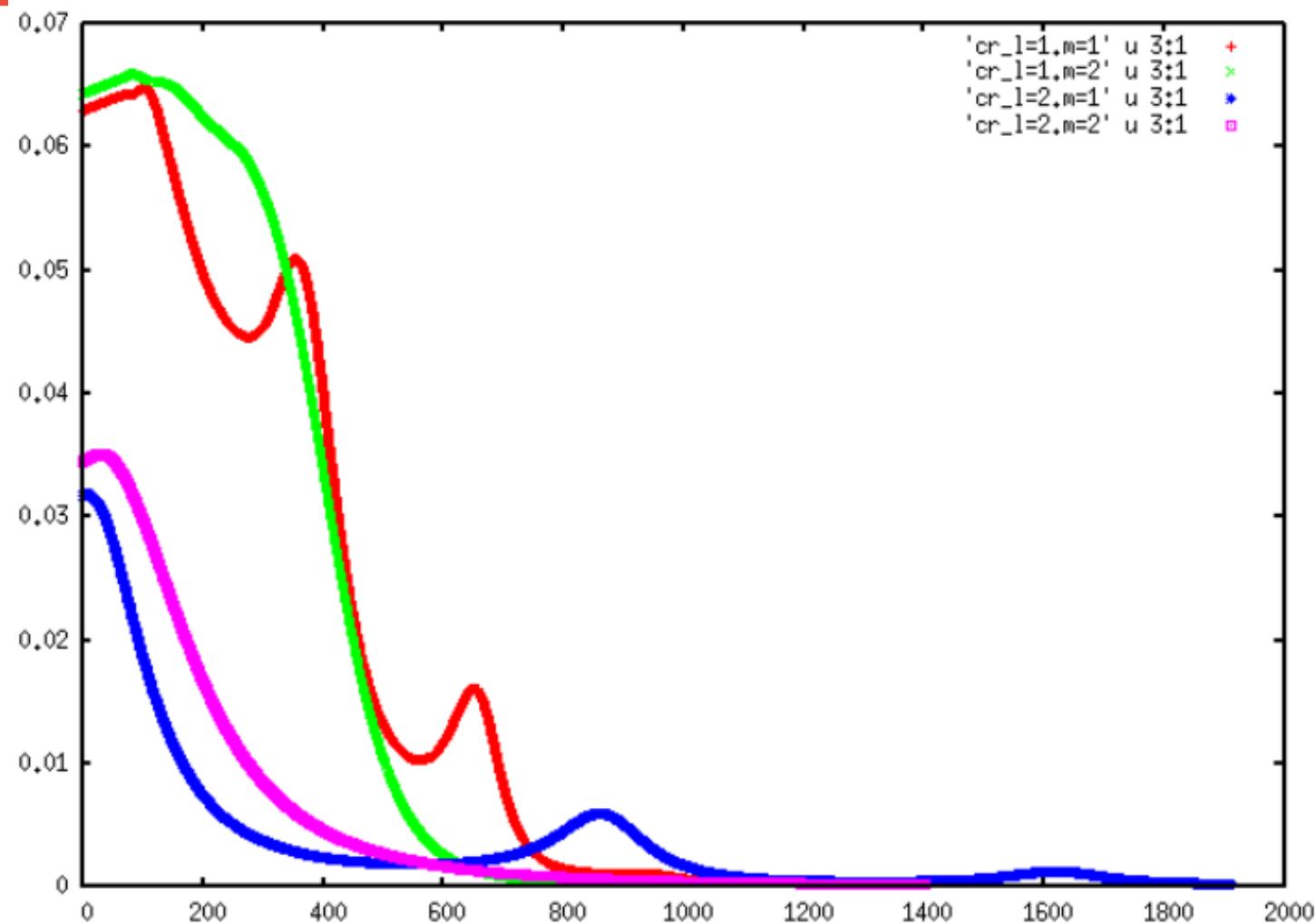


Рис. 9: $[E - wM](t)$

γ	$l = 1, m = 1$	$l = 1, m = 2$	$l = 2, m = 1$	$l = 2, m = 2$
	0.00611485	0.00716309	0.0004769	0.00266098

Таблица 3: Значения γ

Заключение

- Получены профили волновой функции связанного состояния конденсата Бозе-Эйнштейна с различными угловыми моментами.
- Вычислены значения характерных величин (полная энергия системы (E), энергия состояния (w)).
- Получен критерий стабильности, и показано, что состояния с ненулевым угловым моментом не стабильны.
- Проведен поиск нестабильных мод для возмущения.

Литература

- [1] D.G. Levkov, A.G. Panin and I.I. Tkachev, "Relativistic axions from collapsing Bose stars Phys. Rev. Lett. 118 (2017) no.1, 011301
[arXiv:1609.03611]
- [2] N. Bar, D. Blas, K. Blum, S. Sibiryakov, Galactic Rotation Curves vs. Ultra-Light Dark Matter: Implications of the Soliton – Host Halo Relation
[arXiv:1805.00122]
- [3] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing". Third edition, C++.
- [4] Argelia Bernal and F. Siddhartha Guzman, "Scalar Field Dark Matter: non-spherical collapse and late time behavior" Phys.Rev. D74 (2006) 063504
[arXiv:astro-ph/0608523]
- [5] Siddhartha Guzman, L. Arturo Urena-Lopez "Evolution of the Schrödinger-Newton system for a self-gravitating scalar field" , Phys. Rev. D 69, 124033 (2004). ArXiV: gr-qc/0404014.